Tarefa Aula 7: Grafos

Exercício 7: Prove que em uma festa com pelo menos duas pessoas, existem duas pessoas que apertaram o mesmo número de mãos.  
  
Resolução: Resolvendo usando a lógica e Princípio da Casa dos Pombos, temos que o aperto de mão entre duas pessoas é uma relação bilateral (se A apertou a mão de B, então B apertou a mão de A. Ou relação simétrica). Denotando N como a quantidade de pessoas na festa, N inteiro maior que 1, temos que cada pessoa pode ter apertado entre 0 a N – 1 mãos.   
 Visualizando a situação como cada possibilidade de aperto de mão sendo uma casa de Pombos, temos N casas de Pombos e N pombos. Ainda não podemos garantir que existirá uma casa com pelo menos 2 pombos, mas se tivéssemos N casas e N + 1 pombos, existiria uma casa com pelo menos dois pombos, ou seja, estamos bem no limite de pombos, portanto a única solução em que nenhuma casa teria 2 pombos é quando tem um pombo em cada casa. Entretanto, essa configuração é inválida, porque implica que existe uma pessoa que não apertou a mão de ninguém (na casa de 0 apertos) e uma pessoa que apertou a mão de todo mundo (na casa de N – 1 apertos).   
 E sendo essa configuração inválida, é como se não fosse possível usar as N casas ao mesmo tempo, então na realidade temos N – 1 casas de Pombos (e nem todas as combinações seriam válidas porque a soma dos graus tem que ser par) e tendo N pombos, podemos garantir que existe uma casa com pelo menos dois pombos. Voltando no argumento, concluímos que existe duas pessoas que apertaram o mesmo número de mãos.  
  
  
8. Cada um dos 102 estudantes é amigo de pelo menos 68 outros alunos. Prove que existem quatro estudantes com o mesmo número de amigos.  
  
Resolução: De forma análoga ao exercício anterior, temos as possibilidades para cada aluno de ter entre 68 amigos a 101 amigos (34 possibilidades). Então temos 102 = 3.34 pombos e 34 casas, o que nos garante pelo menos 3 pombos por gaiola. Se aumentarmos uma unidade de pombos, temos como garantir pelo menos 4 pombos em uma gaiola, ou seja, a única configuração que nos impede de afirmar isso é a que todas as casas estão ocupadas por 3 pombos, então mostrar que essa é uma configuração inválida garante a prova do enunciado.   
Representando o exercício como um grafo, podemos usar mais argumentos para invalidar uma distribuição dos Pombos nas Casas. Então, estabelecemos o conjunto de vértices como o conjunto dos 102 estudantes, e o conjunto de arestas como a relação dos pares de alunos que são amigos. Temos, como propriedade de um grafo sem laços, que o a soma dos graus dos vértices é o dobro da quantidade de arestas. Então vamos verificar se a soma dos graus na configuração com 3 pombos em cada gaiola é par. A soma com 3 pombos em cada casa é igual ao triplo da soma com 1 pombo em cada gaiola. Assim, temos uma progressão aritmética com A1 = 68, r = 1, A34 = 101, n = 34. Usando a fórmula da soma da PA, a soma resulta em = 169x17. Logo, temos que a soma dos graus dos vértices é 3x169x17. Como não é possível colocar o 2 em evidência, temos que é um número ímpar, resultando em uma configuração inválida.

13. Cinquenta cientistas estão participando de uma conferência e cada um deles conhece pelo menos 25 dos outros (se A conhece B então B conhece A). Prove que:

(a) Existem quatro deles que podem se sentar a uma mesa redonda tendo, cada um deles, dois conhecidos como vizinhos.  
  
Resolução: É interessante observar que nessa mesa redonda de 4, não necessariamente cada cientista precisa conhecer apenas seus vizinhos. Então, caso todos os 50 cientistas se conheçam (um grafo fortemente conexo de 50 vértices), escolher qualquer grupo de 4 e colocá-los de qualquer maneira na mesa atenderá ao enunciado. Agora, se existem 2 cientistas A e B que não se conhecem, podemos colocá-los na mesa de 4 pessoas diametralmente opostos, da seguinte forma:   
 Esquemático

Descrição gerada automaticamente  
Onde C e D são amigos em comum de A e B. C e D podem ou não se conhecer (por isso a linha em laranja ligando C e D). Agora, basta provar que sempre existe C e D que satisfazem a condição. Tirando A e B dos 50 cientistas, temos 48 cientistas que podem ser conhecidos por A ou B (ou pelos dois ao mesmo tempo). Vamos fazer a seguinte análise: cada um dos 48 cientistas restantes é uma gaiola. Se o cientista é conhecido por A, a gaiola ganha um pombo, e se ele for conhecido por B ganha outro pombo, ou seja, cada gaiola pode ter 0,1 ou 2 pombos. Como A e B conhecem pelo menos 25 cientistas, serão distribuídos pelo menos 50 pombos, vamos trabalhar com o caso mínimo em que são distribuídos 50 pombos. Queremos concluir que existe pelo menos duas gaiolas com 2 pombos. Bem, se tivéssemos 49 pombos e 48 gaiolas, poderíamos afirmar que existe uma gaiola com pelo menos 2 pombos, e como o máximo possível é 2 pombos em uma gaiola, teríamos que existe uma gaiola com 2 pombos. Então, para 50 pombos e 48 gaiolas, podemos separar a gaiola com 2 pombos da afirmação anterior, sobrando 48 pombos e 47 gaiolas, o qual concluímos que existe mais uma gaiola com 2 pombos. Voltando no argumento, então existe C e D, então é possível arranjá-los conforme o enunciado.

(b) Os cinquenta cientistas podem se sentar a uma mesa redonda de modo que cada um deles tenha dois conhecidos como vizinhos.  
  
Resolução: Os valores dados do enunciado são um forte indício para usar o Teorema de Dirac. Como o grafo, representado pelos vértices sendo os cientistas e as arestas as relações de conhecimento entre eles, é simples (sem laços e arestas paralelas), então é possível usar o teorema (já que a metade de 50 é 25, e todos os vértices tem pelo menos grau 25) e afirmar que o grafo é Hamiltoniano. Então ele contém um ciclo hamiltoniano, ciclo o qual passa por todos os vértices apenas uma vez. Agora basta relacionar esse ciclo com um grafo ciclo (o grafo pedido pelo enunciado). Dado o trajeto do ciclo hamiltoniano, começando em um vértice/cientista qualquer, temos algo como ...em que os A são vértices/cientistas distintos, e assim fica fácil a visualização de um grafo ciclo:  
 Foto em preto e branco de computador

Descrição gerada automaticamente

17. Prove que um grafo simples com n vértices, maior que 1, todos com grau pelo menos , é conexo.

Achei importante acrescentar esses detalhes ao enunciado porque N pode ser par e se o grafo não for simples, ele pode ter arestas paralelas, o que aumenta o grau do vértice, mas não o conecta a um vértice distinto necessariamente.  
  
Resolução: Vamos provar por absurdo.   
 Para N ímpar (N = 2k + 1, k inteiro) temos que . Supondo que no grafo existem o vértice A e B tal que é impossível ir de A até B em um passeio (ou seja, o grafo não é conexo). Como o grau do vértice A é maior ou igual a , considerando o caso mínimo, então existem vértices conectados a A que não devem ser possíveis de fazer um passeio até B (porque senão seria possível ir de A até esse vértice e daí ir até B). Contando com o vértice A, temos 1 + = vértices em que não é possível ir até B. Ou seja, tendo em vista que B não está conectado nele mesmo (grafo simples não admite laço), temos que n – 1 – ( = vértices podem estar conectados a B, assim o grau máximo possível de B seria , o que é uma contradição, já que teríamos que ter que B tem grau de pelo menos . Ou seja, o grafo é conexo.  
  
Para N par (N = 2k) temos que . Como Diagrama

Descrição gerada automaticamente, então . A solução fica bem parecida com o caso do N ímpar.  
 Supondo que no grafo existem o vértice A e B tal que é impossível ir de A até B em um passeio (ou seja, o grafo não é conexo). Como o grau do vértice A é maior ou igual a , considerando o caso mínimo, então existem vértices conectados a A que não devem ser possíveis de fazer um passeio até B (porque senão seria possível ir de A até esse vértice e daí ir até B). Contando com o vértice A, temos 1 + = vértices em que não é possível ir até B. Ou seja, tendo em vista que B não está conectado nele mesmo (grafo simples não admite laço), temos que n – 1 – ( = vértices podem estar conectados a B, assim o grau máximo possível de B seria , o que é uma contradição, já que teríamos que ter que B tem grau de pelo menos . Ou seja, o grafo é conexo.

Como o enunciado original (da apostila) ficou faltando alguns detalhes, a demonstração para N ímpar e admitindo que não tem arestas paralelas é suficiente para a tarefa.